ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

Vũ Thị Thùy Linh

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN RAYLEIGH-STOCKES NỬA TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

Vũ Thị Thùy Linh

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN RAYLEIGH-STOCKES NỬA TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. Trần Đình Kế

Thái Nguyên - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Vũ Thị Thùy Linh

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo - PGS. TS. Trần Đình Kế, người đã trực tiếp hướng dẫn, giúp đỡ, chỉ bảo tận tình, tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, ban chủ nhiệm khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên ,Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã quan tâm giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Vũ Thị Thùy Linh

Mục Lục

Mục lục

Đặt vấn đề

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán

$$\partial_t u - (1 + \gamma\partial_t^\alpha)\Delta u = f(u) \text{ trong } \Omega, t > 0, \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \text{ trong } \Omega, \tag{3}$$

ở đó $\gamma > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α xác định bởi

$$\partial_t^\alpha v(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h_{1-\alpha}(t-s)v(s)ds,$$

ở đây $h_\beta(t) = \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ với $\beta > 0, t > 0$.

Trong lý thuyết động lực học chất lỏng, việc nghiên cứu tính chất của các dòng chất lỏng không Newton có đặc tính nhớt đàn hồi thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu bởi những ứng dụng quan trọng của chúng trong lưu biến học, địa vật lý, công nghệ hóa dầu,.... Phương trình (1) phát sinh từ bài toán Rayleigh-Stokes tổng quát mà luật hợp thành của nó được mô tả trong các công trình [7, 13], được dùng để mô tả dòng chất lỏng bậc hai (second grade fluid) trong một hình trụ. Phương trình này cũng được sử dụng để mô tả dòng chất lỏng Oldroyd-B trong một trường hợp riêng [7]. Chú ý rằng thành phần đạo hàm phân thứ được sử dụng để đặc tả tính chất nhớt đàn hồi.

Trong các tài liệu khảo sát, đã có một số lượng lớn các bài báo đưa ra các phương pháp giải số cho bài toán Rayleigh-Stokes, ví dụ [1, 2, 3, 4, 12, 16]. Trong các công trình [7, 8, 13, 15, 17] các tác giả đã xây dựng công thức nghiệm cho bài toán Rayleigh-Stokes trong trường hợp tuyến tính. Gần đây, bài toán giá trị cuối cho phương trình (1) đã được giải quyết trong các bài báo [10, 14], cũng là một hướng nghiên cứu định tính đáng chú ý cho bài toán Rayleigh-Stokes. Một trong những vấn đề định tính quan trọng trong lý thuyết phương trình vi tích phân là khảo sát tính ổn định của nghiệm. Các kết quả theo hướng này cho phương trình (1) chưa được biết đến nhiều. Chúng tôi lựa chọn chủ đề tính ổn định nghiệm của bài toán Rayleigh-Stokes làm nội dung chính của luận văn. Các kết quả trong luận văn được trình bày dựa vào những nghiên cứu gần đây trong các công trình [1, 9].

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Công thức biểu diễn nghiệm

Xét bài toán

$$\omega'(t) + \mu(1 + \gamma\partial_t^\alpha)\omega(t) = 0, \ t > 0, \tag{1.1}$$

$$\omega(0) = 1, \tag{1.2}$$

trong đó ẩn hàm ω là một hàm vô hướng, μ và γ là các tham số dương. Một số tính chất quan trọng của ω được trình bày trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử ω là nghiệm của bài toán* (1.1)-(1.2)*. Khi đó*

1. $0 < \omega(t) \le 1$ *với mọi* $t \ge 0$*;*

2. *Hàm ω là hoàn toàn đơn điệu với $t \ge 0$, tức là $(-1)^n\omega^{(n)}(t) \ge 0$ với mọi $t \ge 0$ và $n \in \mathbb{N}$;*

3. $\mu\omega(t) \le C\min\{t^{-1}, t^{\alpha-1}\}$*, với mọi $t > 0$, ở đó C là một hằng số dương;*

4. $\displaystyle\int_0^T \omega(s)ds \le \mu^{-1}(1 - \omega(T))$*, với mọi* $T > 0$.

Chứng minh. Chứng minh cho (1)-(3) được trình bày trong [1, Theorem 2.2]. Để chứng minh khẳng định cuối cùng, lấy tích phân hai vế của (1.1), ta có

$$\omega(T) + \mu\int_0^T \omega(s)ds + \mu\int_0^T h_{1-\alpha}(T-s)\omega(s)ds = 1.$$

Từ đó

$$\omega(T) + \mu\int_0^T \omega(s)ds \le 1,$$

nhờ tính dương của hàm $\omega(\cdot)$. Vậy (4) được chứng minh. □

Ký hiệu $\omega(\cdot,\mu,\gamma)$ là nghiệm của (1.1)-(1.2), để phản ánh sự phụ thuộc của ω vào các tham số μ và γ. Sau đây, ta sử dụng ký hiệu $u*v$ để chỉ tích chập Laplace của hai hàm u và v:

$$(u*v)(t)=\int_0^t u(t-s)v(s)ds,\ u,v\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+).$$

Ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.2. *Với $t\geq 0$ và $\gamma>0$ cho trước, hàm $\mu\mapsto\omega(t,\mu,\gamma)$ không tăng trên khoảng $[0,\infty)$.*

Chứng minh. Biến đổi Laplace của ω được tính như sau

$$\hat{\omega}(\lambda,\mu,\gamma):=\mathcal{L}[\omega](\lambda)=\frac{1}{\lambda+\gamma\mu\lambda^\alpha+\mu}.$$

Từ đó

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\mu}=-\frac{1+\gamma\lambda^\alpha}{(\lambda+\gamma\mu\lambda^\alpha+\mu)^2}=-[(1+\gamma\lambda^\alpha)\hat{\omega}]\hat{\omega}.$$

Chú ý rằng

$$(1+\gamma\lambda^\alpha)\hat{\omega}=\mathcal{L}[(1+\gamma\partial_t^\alpha)\omega],$$

ta có

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\mu}=-\mathcal{L}[(1+\gamma\partial_t^\alpha)\omega]\mathcal{L}[\omega].$$

Áp dụng biến đổi Laplace ngược cho phương trình cuối, ta được

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mu}=-(\omega+\gamma\partial_t^\alpha\omega)*\omega,$$

do quy tắc chập của phép biến đổi Laplace. Sử dụng (1.1), ta có

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mu}=\frac{1}{\mu}(\omega'*\omega)\leq 0,$$

nhờ vào tính chất hoàn toàn đơn điệu của ω. Mệnh đề đã được chứng minh. □

Bây giờ ta xét bài toán với phương trình không thuần nhất:

$$v'(t)+\mu(1+\gamma\partial_t^\alpha)v(t)=g(t),t>0, \tag{1.3}$$

$$v(0)=v_0, \tag{1.4}$$

ở đó $\mu>0$, $\gamma>0$ và g là một hàm liên tục.

Mệnh đề 1.3. *Nghiệm của bài toán* (1.3)-(1.4) *xác định bởi*

$$v(t) = \omega(t)v_0 + \omega * g(t),\ t \geq 0,$$

trong đó ω *là nghiệm của* (1.1)-(1.2).

Chứng minh. Áp dụng biến đổi Laplace cho phương trình (1.3), ta có

$$\lambda\hat{v} - v_0 + \mu(1 + \gamma\lambda^\alpha)\hat{v} = \hat{g}.$$

Từ đó

$$\hat{v} = \frac{v_0}{\lambda + \gamma\mu\lambda^\alpha + \mu} + \frac{\hat{g}}{\lambda + \gamma\mu\lambda^\alpha + \mu} = \hat{\omega}v_0 + \hat{\omega}\hat{g}.$$

Biến đổi Laplace ngược đối với phương trình cuối, ta được

$$v(t) = \omega(t)v_0 + \int_0^t \omega(t-s)g(s)ds. \tag{1.5}$$

Ngược lại, ta chứng minh hàm v cho bởi (1.5) là nghiệm của (1.3)-(1.4). Thật vậy, đặt $L[v] = v' + \mu(1 + \gamma\partial_t^\alpha)v$, khi đó

$$L[v] = L[\omega]v_0 + L[\omega * g] = L[\omega * g].$$

Ta chỉ cần chứng minh $L[\omega * g] = g$. Tính toán trực tiếp, ta thu được

$$\begin{aligned}
(\omega * g)' + \mu(\omega * g) &= g + \omega' * g + \mu(\omega * g) \\
&= g + (\omega' + \mu\omega) * g, \\
\partial_t^\alpha(\omega * g) &= \frac{d}{dt}[h_{1-\alpha} * (\omega * g)] \\
&= \frac{d}{dt}(h_{1-\alpha} * \omega) * g \\
&= (\partial_t^\alpha\omega) * g.
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
L[\omega * g] &= (\omega * g)' + \mu(\omega * g) + \mu\gamma\partial_t^\alpha(\omega * g) \\
&= g + (\omega' + \mu\omega + \mu\gamma\partial_t^\alpha\omega) * g \\
&= g + L[\omega] * g = g.
\end{aligned}$$

Mệnh đề đã được chứng minh. □